1. Число 2023 обладает интересны свойством: оно равно произведению суммы цифр на квадрат суммы квадратов цифр. ($2023 = (2+0+2+3)\cdot(2^2+0^2+2^2+3^2)^2$) Докажите, что таких чисел лишь конечное число.

Пусть в таком числе n цифр. Тогда оно, с одной стороны, не меньше, чем 10^{n-1} (Это наименьшее числа, имеющее n цифр, на при этом оно не может превосходит $9n\cdot(81n)^2$. Ясно, что это возможно лишь для конечного числа n.

2. Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямые AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке X. Перпендикуляр к AC, проведённый через точку X, пересекает сторону AB в точке Y. Докажите, что прямая YA_1 делит отрезок BH пополам.

Обозначим точку пересечение YA_1 и BH за T. По теореме Менелая для треугольника ABH и прямой YT имеем $\dfrac{BT}{TH} = \dfrac{AA_1}{HA_1}\cdot\dfrac{YB}{AY}$. По теореме Фалеса можно продолжить равенство

$$\frac{BT}{TH} = \frac{AA_1}{HA_1}\cdot\frac{XH}{AX} = \frac{AA_1}{AX} : \frac{HA_1}{HX}.$$

Так как B_1B является биссектрисой треугольника $A_1B_1C_1$, то по теореме о внешней и внутренней биссектрисах для треугольника XB_1A_1 имеем

$$\frac{AA_1}{AX} = \frac{B_1A_1}{B_1X} = \frac{HA_1}{HX},$$

откуда и следует решение задачи. Само собой, есть другие решения

3. Сумма нескольких, не превосходящих 10 чисел, равна S. Будем говорить, что группа чисел хорошая, если ее можно разбить на две группы так, чтобы в каждой группе сумма была бы не больше 70. При каком наибольшем S существует хорошая группа?

Ответ: 140. Больше быть не может, так как разбиение на две группы с суммой чисел не более 70 в каждой, означает, что сумма всех чисел не более 140. Пример, когда разбиение возможно - 14 чисел по 10.

Разумеется, жюри конкурса допустило в формулировке вопроса опечатку. Подразумевался вопрос - при каком наибольшем S можно наверняка утверждать, что группа чисел с суммой S — хорошая? Порешайте на досуге эту задачу, она поинтереснее.

4. Сто гномиков едят пиццу. Сначала первый гномик съедает 1% пиццы, потом второй — 2% оставшейся части, потом третий — 3% остатка и т.д., пока последний не доест оставшийся кусок. Который по счету гномик съест наибольшую часть пиццы?

Ответ: Десятый гномик. Пусть $n = 100$ Сравним доли k-го и $k+1$-го гостей. Пусть k-й гномик сьел ka/n кг пиццы от оставшихся к его ходу a кг. Тогда $k+1$-й гномик съел

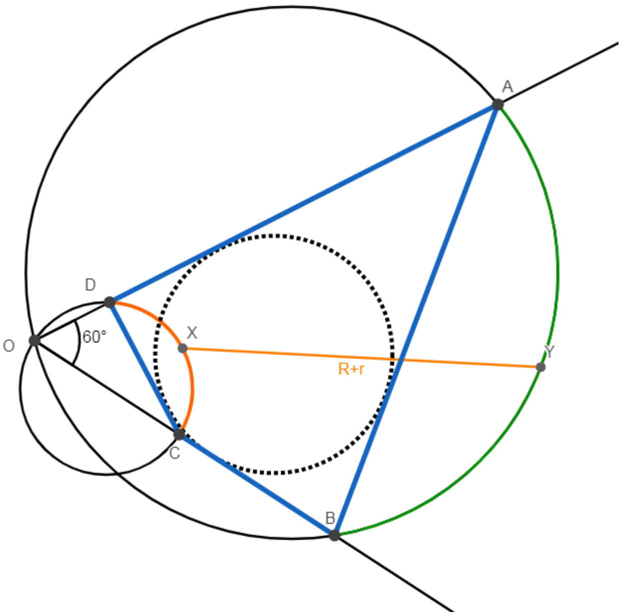
$$\frac{k+1}{n}\left(a-\frac{ka}{n}\right) = \frac{(n-k)(k+1)a}{n^2} = \frac{ka}{n}\cdot\frac{(n-k)(k+1)}{nk}.$$

Нам надо сравнить с 1 число $(nk+n-k^2-k)/nk$. При $k(k+1) < n$ оно больше 1, а при $k(k+1) > n$ оно меньше 1. Таким образом, при $k \le 9$ порция $k+1$-го гномика больше, а при $k \ge 10$ — меньше, чем порция k-го. Иными словами, 10-й гномик съел больше всех.

5. В ряд стоят N человек, каждый из которых рыцарь или лжец. Первый человек сказал: «Все здесь лжецы.» Второй сказал: «Не менее половины здесь лжецы» Третий сказал: «Не менее трети здесь лжецы.» и т. д. N-ый человек сказал: «Не менее $\frac{1}{N}$ из нас — лжецы». Для скольких N от 1 до 10000 такая ситуация возможна?

Заметим, что каждое следующее утверждение является следствием предыдущего. Поэтому как только в этой цепочке появился один рыцарь, после него все тоже будут рыцарями. Пусть лжецов k. Тогда они составляет меньше $1/k$, но не меньше $1/k+1$ от общего числа людей. Это значит, что N может принимать значения от k^2+1 до k^2+k. То есть при фиксированном k общее количество людей может принимать ровно k разных значений. Так как $10000 = 100^2$, следовательно, на подходят k от 1 до 99. Поэтому ответ - это сумма чисел от 1 до 99, то есть 4950.

6. Дан угол с вершиной O, равный $60°$. Окружность ω_1 радиуса R, проходящая через точку O пересекает его стороны в точках A и B, а окружность ω_2 радиуса r, тоже проходящая через точку O пересекает стороны угла в точках C и D, причем точка C расположена на отрезке OB, а точка D — на отрезке OA. Оказалось, что расстояние между серединами дуг CD и AB (оказавшихся внутри угла) равно $R+r$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — описанный.



Понятно, что точки X и Y лежат на биссектрисе угла O, и следовательно, весь отрезок XY является частью этой биссектрисы. Теперь заметим, что $XD = XC = r$ и $YA = YB = R$ так эти отрезки стягивают дуги в 30° в соответствующих окружностях. Тогда согласно лемме о трезубце внешние биссектрисы треугольника OCD пересекаются в точке на отрезке XY такой, что расстояние до X от нее равно r. Аналогично, через эту же точку проходят внутренние биссектрисы треугольника OAB. Поэтому все биссектрисы четырехугольника $ABCD$ пересекаются в одной точке. Это и означает, что он описанный.

7. Многочлен $p(x)$ имеет целый корень. Какое наибольшее количество различных целых корней может иметь уравнение $p(x) = 1673$?

Ответ: сколько угодно. Пример строится с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа: полагаем, что $p(0) = 0$ и $p(k) = 1673$ для всех k от 1 до n

И в этой задаче жюри конкурса допустило промах с формулировкой (жюри в этом году слабо головой :). Правильная формулировка такая - и многочлен с целыми коэффициентами, и корни тоже ищем только целые различные. И эту задачу порешайте самостоятельно, она весьма интересная.И, кстати, она станет еще интереснее, если 1673 заменить на 2023.

8. Докажите, что нечётное число $p > 1$ — простое тогда и только тогда, когда среди любых $\frac{p+1}{2}$ различных натуральных чисел можно найти два числа, сумма которых хотя бы в р раз больше их наибольшего общего делителя.

Пусть p — простое. Если два числа a и b умножить на одно и то же число k, отношение их суммы к их наибольшему общему делителю не изменится. Поэтому достаточно доказать утверждение задачи для случая, когда $\frac{p+1}{2}$ чисел не имеют общего делителя.

Если среди данных $\frac{p+1}{2}$ чисел найдётся число a, кратное p, то найдётся и число b, не кратное p. Для этих двух чисел имеем $\frac{a+b}{(a,b)} > \frac{a}{(a,b)} \geq p$.

Если среди $\frac{p+1}{2}$ нет кратных p, то среди них можно найти два числа a и b, сумма или разность которых делится на p (в противном случае для каждого натурального $k \leq \frac{p-1}{2}$ среди наших чисел есть не более одного, дающего остаток k или $p-k$ при делении на p, то есть всего чисел не более $\frac{p-1}{2}$). Если $a+b$ кратно p, то $\frac{a+b}{(a,b)} \geq p$. А если $a-b$ кратно p, то $\frac{a+b}{(a,b)} > \frac{a-b}{(a,b)} \geq p$, что и требовалось.

Пусть теперь $p = xy$ — составное, x, $y > 1$. Рассмотрим тогда следующие $\frac{p+1}{2}$ чисел: первые x натуральных чисел (будем называть их маленькими) и все чётные числа от $x+1$ до $p-x = x(y-1)$ (таких чисел как раз $\frac{p-2x-1}{2}+1 = \frac{p+1}{2}-x$, будем называть их большими). Убедимся, что в этом наборе нет двух чисел, сумма которых хотя бы в p раз больше их наибольшего общего делителя. Действительно, у таких чисел сумма должна быть не меньше p, то есть это либо x и $p-x$, либо два больших числа. Но в первом случае искомое отношение равно $\frac{p}{x} = y$, а во втором случае оно не больше, чем $p-x+p-x-1/2$ (так как у этих чисел есть общий делитель 2).